

# *Table des matières*

<b>Avertissement</b>	<b>13</b>
<b>I Éléments de géostatistique linéaire</b>	<b>17</b>
<b>Introduction</b>	<b>19</b>
1. Bref rappel historique . . . . .	19
2. Trois âges de la géostatistique . . . . .	20
3. Un point de vocabulaire . . . . .	22
4. Sommaire . . . . .	23
<b>1 Des Variables Régionalisées aux Fonctions Aléatoires</b>	<b>27</b>
1. Les deux niveaux de modèle . . . . .	27
1.1. Point de départ : le phénomène régionalisé .	27
1.2. Première étape : la Variable Régionalisée . .	29
1.3. Les leçons du modèle primaire . . . . .	31
1.4. Les outils du modèle primaire . . . . .	32
1.5. Le modèle topo-probabiliste . . . . .	33
1.6. Notations . . . . .	34
2. Problèmes et méthodes de Géostatistique Intrinsèque	35
2.1. « LE » problème méthodologique . . . . .	35
2.2. Élément de solution . . . . .	36
2.3. Mécanismes de passage . . . . .	36
3. Deux notions essentielles . . . . .	38
3.1. Stationnarité . . . . .	38

3.2.	Ergodicité . . . . .	39
3.3.	Récapitulation préliminaire . . . . .	39
3.4.	Parallèle entre les deux niveaux de modèles	40
3.5.	Notion d'échelle . . . . .	41
3.6.	Une illustration . . . . .	42
4.	Structure d'une étude en Géostatistique Intrinsèque	43
4.1.	Rappel préalable . . . . .	43
4.2.	Phase d'analyse . . . . .	44
4.3.	Phase de synthèse . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Géostatistique Transitive</b>	<b>51</b>
1.	Le Covariogramme Transitif . . . . .	51
1.1.	Définition . . . . .	51
1.2.	Propriétés théoriques immédiates . . . . .	52
1.3.	Positivité . . . . .	53
1.4.	Comportement à l'origine . . . . .	54
1.5.	Régularisations . . . . .	54
2.	Application à un problème d'estimation . . . . .	55
2.1.	Position du problème . . . . .	55
2.2.	Implantation de la maille . . . . .	56
2.3.	Propriétés de l'Erreur d'Estimation . . . . .	56
2.4.	Nécessité d'une modélisation . . . . .	57
3.	Modélisation du Covariogramme Transitif . . . . .	59
3.1.	Contraintes sur le modèle . . . . .	59
3.2.	Les formules d'approximation . . . . .	59
3.3.	Une situation préalable . . . . .	61
3.4.	Remarque sur la stationnarité . . . . .	62
3.5.	Les trois Covariogrammes . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Buts et moyens de la Géostatistique Linéaire (1)</b>	<b>65</b>
1.	Limites de la géostatistique linéaire . . . . .	65
1.1.	Cadre de travail . . . . .	65
1.2.	Limites du modèle . . . . .	66
1.3.	Utilisation du modèle . . . . .	67
1.4.	Commentaire . . . . .	68
2.	Mécanismes de calcul des variances . . . . .	69
2.1.	Les Combinaisons Linéaires Autorisées . . . . .	69

2.2.	Moments d'une CLA . . . . .	70
2.3.	Propriétés de la covariance stationnaire . .	71
3.	Variance d'extension . . . . .	72
3.1.	Notations . . . . .	72
3.2.	Formule de la Variance d'Extension . . . . .	72
3.3.	Analyse de la formule . . . . .	73
3.4.	Cas particulier d'un réseau de prélèvements fini . . . . .	75
4.	Variance de dispersion . . . . .	75
4.1.	Dispersion statistique de $v$ dans $V$ . . . . .	76
4.2.	Passage à la version probabiliste . . . . .	77
4.3.	Variance de dispersion de $v$ dans $V$ . . . . .	77
4.4.	Résultats complémentaires . . . . .	78
4.5.	Formule de Krige . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Stationnarité et ergodicité</b>	<b>83</b>
1.	Les deux niveaux de modèle . . . . .	83
1.1.	Signification et nécessité de l'hypothèse stationnaire . . . . .	83
1.2.	Les problèmes globaux . . . . .	84
1.3.	Les problèmes locaux . . . . .	85
2.	Vers un affaiblissement de l'hypothèse stationnaire	88
2.1.	Modèle sans variance a priori . . . . .	88
2.2.	Combinaisons linéaires autorisées . . . . .	89
3.	L'ergodicité . . . . .	90
3.1.	Permanence d'une hypothèse de stationnarité	90
3.2.	Estimation de l'espérance . . . . .	90
3.3.	La portée intégrale . . . . .	91
3.4.	Reconstruction opératoire . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Buts et moyens de la Géostatistique Linéaire (2)</b>	<b>95</b>
1.	Mécanismes de calcul en hypothèse intrinsèque . . . . .	95
1.1.	Le modèle intrinsèque . . . . .	95
1.2.	Combinaisons linéaires autorisées . . . . .	97
1.3.	Mécanismes de calcul . . . . .	98
1.4.	Propriétés du variogramme stationnaire . .	100
2.	Formules des variances . . . . .	101

2.1.	Variance d'Extension . . . . .	101
2.2.	Variance de Dispersion . . . . .	102
2.3.	Autre présentation du variogramme . . . . .	102
3.	Régularisations . . . . .	103
3.1.	Résultats généraux . . . . .	103
3.2.	Formule de changement de support . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Estimations</b>	<b>107</b>
1.	Alternative global/local en estimation . . . . .	107
1.1.	Qu'appelons-nous « estimation » ? . . . . .	107
1.2.	Estimation globale, estimation locale . . . . .	108
2.	L'estimation globale . . . . .	109
2.1.	Échantillonnage aléatoire pur . . . . .	110
2.2.	Échantillonnage aléatoire stratifié . . . . .	112
2.3.	Remarque sur la géométrie . . . . .	113
2.4.	Maille régulière à implantation préférentielle	113
2.5.	Maille régulière à implantation flottante . . . . .	114
2.6.	Une remarque instructive . . . . .	115
3.	L'estimation locale . . . . .	116
3.1.	Introduction . . . . .	116
3.2.	Les étapes du krigeage . . . . .	117
3.3.	Quelques exemples de krigeage ponctuel . . . . .	123
3.4.	Propriétés du système de Krigeage . . . . .	129
3.5.	Évaluation optimale de l'espérance mathématique . . . . .	132
<b>7</b>	<b>Vers les modèles non stationnaires</b>	<b>137</b>
1.	Introduction à la non-stationnarité . . . . .	137
1.1.	Rappel sur le rôle d'une hypothèse station- naire . . . . .	137
1.2.	Idée directrice de la Géostatistique Non Stationnaire . . . . .	138
1.3.	Comment tester la non-stationnarité ? . . . . .	139
2.	Le Krigeage Universel . . . . .	140
2.1.	La dichotomie . . . . .	140
2.2.	KU à modèle sous-jacent stationnaire . . . . .	144
2.3.	KU à modèle sous-jacent intrinsèque strict . . . . .	146
2.4.	Propriétés du Krigeage Universel . . . . .	150

---

3.	Le statut de la Dérive . . . . .	153
3.1.	Introduction . . . . .	153
3.2.	Évaluation optimale de la Dérive: idée directrice . . . . .	154
3.3.	Modèle sous-jacent stationnaire . . . . .	155
3.4.	Retour sur l'indépendance linéaire des fonc- tions de base . . . . .	156
3.5.	Modèle sous-jacent intrinsèque strict . . . . .	156
3.6.	Vers un travail en accroissements . . . . .	157
4.	Les coefficients de la Dérive . . . . .	158
4.1.	Évaluation des coefficients: modèle stationnaire . . . . .	158
4.2.	Évaluation des coefficients: modèle intrinsèque . . . . .	159
4.3.	Le problème du terme constant . . . . .	160
5.	Complément sur les systèmes du Krigeage Universel	164
5.1.	Hypothèse et notations . . . . .	164
5.2.	Matrice inverse du Krigeage Universel . . . . .	164
5.3.	Conséquence: additivité des estimations . . . . .	165
5.4.	Correction de Dérive . . . . .	167
5.5.	Additivité des variances . . . . .	167
5.6.	Commentaires . . . . .	169
6.	Étapes et problèmes de l'Analyse Variographique . . . . .	169
6.1.	L'estimateur des moindres carrés . . . . .	169
6.2.	Le variogramme des résidus . . . . .	171
6.3.	Problèmes de biais . . . . .	171
6.4.	Problèmes d'indétermination . . . . .	172
6.5.	Conclusion provisoire . . . . .	173
<b>8</b>	<b>Géostatistique Intrinsèque</b>	<b>177</b>
1.	Introduction aux FAI-k . . . . .	177
1.1.	Idée directrice . . . . .	177
1.2.	Vers des Combinaisons Linéaires Autorisées	178
1.3.	Définition des CLAk . . . . .	179
1.4.	FAI-k et représentation . . . . .	180
2.	Covariances Généralisées: théorème fondamental . . . . .	184
2.1.	Dérive d'une FAI-k . . . . .	185

2.2.	Covariance Généralisée: définition . . . . .	185
2.3.	Théorème d'existence et d'unicité . . . . .	186
2.4.	Fonctions de type positif conditionnel . . . . .	187
3.	Le Krigeage Intrinsèque . . . . .	188
3.1.	L.A.U.O. . . . .	188
3.2.	Le système de Krigeage Intrinsèque . . . . .	190
3.3.	Propriétés du système de KI . . . . .	190
3.4.	Conditions de régularité du système de Krigeage Intrinsèque . . . . .	193
4.	Présentation duale du Krigeage . . . . .	194
4.1.	Le Krigeage comme interpolateur . . . . .	194
4.2.	Système de Krigeage dual . . . . .	194
4.3.	Interprétation des équations duales . . . . .	195
4.4.	Équivalence splines-krigeage . . . . .	196
<b>9</b>	<b>Introduction à la Géostatistique Multivariable</b>	<b>201</b>
1.	Position du problème et notations . . . . .	202
1.1.	Remarque préliminaire . . . . .	202
1.2.	Nécessité d'un modèle multivariable: un exemple simpliste . . . . .	204
1.3.	Deux considérations générales sur le multivariable . . . . .	206
1.4.	Notations . . . . .	208
2.	Mise en place de la fonction structurale . . . . .	209
2.1.	Le modèle FAST-2 d'espérance nulle . . . . .	209
2.2.	Propriétés élémentaires des covariances croisées . . . . .	210
2.3.	Indications sur le modèle intrinsèque strict	212
2.4.	Liens entre covariances et variogrammes croisés . . . . .	214
3.	Cokrigeage de FAST-2 d'espérances nulles . . . . .	215
3.1.	Construction du système de cokrigeage « simple » . . . . .	215
3.2.	Propriétés du système . . . . .	217
3.3.	Éléments de réflexion générale sur le cokrigeage . . . . .	220
4.	Le cokrigeage universel . . . . .	223
4.1.	Dernier retour sur le modèle intrinsèque . . . . .	223

4.2.	Les équations du cokrigage universel . . .	225
4.3.	Compléments sur le cokrigage universel . .	228
5.	Recherche de simplification du cokrigage universel	231
5.1.	Position du problème, et premières hypothèses simplificatrices . . . .	231
5.2.	Principal résultat . . . . .	232
5.3.	Adaptation des notations: cokrigage . . .	233
5.4.	Adaptation des notations: coefficients des dérives . . . . .	234
5.5.	Transformation linéaire régulière des variables . . . . .	235
5.6.	Cokrigage de variables transformées . . .	237
5.7.	Coefficients des dérivées des variables transformées . . . . .	240
5.8.	Application: la corrélation intrinsèque . . .	241
5.9.	Perspectives: l'autokrigeabilité . . . . .	245
6.	Principes de l'analyse krigeante . . . . .	246
6.1.	Présentation . . . . .	246
6.2.	Le modèle linéaire de corégionalisation . . .	246
6.3.	Estimation des facteurs . . . . .	250
6.4.	Remarque finale . . . . .	253
7.	Notion de dérive externe . . . . .	254
7.1.	Justification, et modèle . . . . .	254
7.2.	Variographie . . . . .	255
7.3.	Krigeage avec dérive externe . . . . .	256
7.4.	Remarques finales . . . . .	257

## II Annexes 261

### 1 Mécanismes d'utilisation de l'espérance conditionnelle 263

1.	Théorème et mise en œuvre . . . . .	263
1.1.	Énoncé du théorème . . . . .	263
1.2.	Quelques formules . . . . .	264
1.3.	Les étapes de la mise en œuvre . . . . .	264
1.4.	Remarque sur la variance conditionnelle . .	265

1.5.	Généralisation à plusieurs variables conditionnantes . . . . .	265
2.	Application aux calculs de variogrammes . . . . .	266
2.1.	Génération d'un modèle triangulaire . . . . .	266
2.2.	Génération d'un modèle exponentiel . . . . .	267
3.	Introduction au krigeage aléatoire . . . . .	268
3.1.	Présentation . . . . .	268
3.2.	Linéarité, autorisation et universalité . . . . .	268
3.3.	Optimalité . . . . .	269
3.4.	Système du Krigeage Aléatoire . . . . .	271
3.5.	Remarque importante . . . . .	271
<b>2</b>	<b>Compléments sur le théorème d'additivité</b>	<b>273</b>
1.	Estimation des résidus et Krigeage Simple . . . . .	273
1.1.	Hypothèses . . . . .	273
1.2.	Conditions d'orthogonalité . . . . .	274
1.3.	Estimation du Résidu . . . . .	275
1.4.	Estimation des Résidus et Krigeage Simple	277
1.5.	Quelques relations d'inégalité entre variances . . . . .	278
1.6.	Récapitulation sur les variances et covariances . . . . .	278
1.7.	Quelques valeurs particulières de la somme des poids de KS . . . . .	279
2.	Théorème d'additivité pour le modèle intrinsèque .	281
2.1.	Expression du théorème au niveau des estimateurs . . . . .	281
2.2.	Expression du théorème au niveau des variances . . . . .	283
2.3.	Illustration sur un cas simple . . . . .	284
3.	Généralisation à des Krigeages Universels de degrés différents . . . . .	285
3.1.	Notations . . . . .	285
3.2.	Additivité des estimateurs du Krigeage . .	286
3.3.	Additivité des variances . . . . .	288
3.4.	Formulaire pour les estimateurs des coefficients de la Dérive . . . . .	288



<b>3 Aspect dual du Krigeage Universel</b>	<b>291</b>
1. Présentation duale du Krigeage Universel . . . . .	291
1.1. Complément sur l'estimation du résidu . . . . .	291
1.2. Estimation de la Dérive et Krigeage Universel . . . . .	292
2. Caractérisation des coefficients du Krigeage Universel . . . . .	293
3. Intérêt pratique . . . . .	294
4. Perspectives . . . . .	294
<b>4 Démonstration du théorème des Représentations</b>	<b>297</b>
1. Hypothèses . . . . .	297
2. Énoncé du théorème . . . . .	297
3. Construction d'une Représentation particulière . . . . .	297
3.1. Choix d'un système de pondérateurs . . . . .	297
3.2. Construction d'une Combinaison Linéaire Autorisée d'ordre $k$ . . . . .	298
3.3. Construction d'une Fonction Aléatoire non stationnaire . . . . .	298
3.4. Conclusion . . . . .	299
4. Caractérisation de l'ensemble de toutes les Représentations. . . . .	299
4.1. Énoncé . . . . .	299
4.2. Condition suffisante . . . . .	300
4.3. Condition nécessaire . . . . .	300
<b>5 Démonstration du théorème de régularité du Krigeage Intrinsèque</b>	<b>303</b>
1. Énoncé du théorème . . . . .	303
2. Remarque préliminaire . . . . .	303
3. Condition nécessaire . . . . .	304
3.1. Nécessité de la seconde condition . . . . .	304
3.2. Effet du non-respect de la première condition . . . . .	304
3.3. Nécessité de la première condition . . . . .	305
3.4. Résultat complémentaire . . . . .	305
4. Condition suffisante . . . . .	306

<b>6</b>	<b>Équivalence Spline-Krigeage</b>	<b>307</b>
1.	Estimation des coefficients de la dérive . . . . .	307
1.1.	Système d'estimation . . . . .	307
1.2.	Estimateur du maximum de vraisemblance (cas gaussien) . . . . .	308
1.3.	Point de vue général . . . . .	309
1.4.	Conclusion . . . . .	309
2.	Notations Générales . . . . .	310
2.1.	Indices et ensembles concernés . . . . .	310
2.2.	Matrices de covariances . . . . .	310
2.3.	Une identité . . . . .	311
2.4.	Identification des termes . . . . .	312
3.	Krigeage Simple . . . . .	313
3.1.	Système d'estimation . . . . .	313
3.2.	Minimisation d'une intégrale d'espace . . . . .	313
4.	Krigeage Universel . . . . .	313
4.1.	Système d'estimation . . . . .	313
4.2.	Minimisation d'une intégrale d'espace . . . . .	313
5.	Krigeage Intrinsèque (FAI-k) . . . . .	314
5.1.	Position du problème . . . . .	314
5.2.	Donner un sens aux Splines . . . . .	315
5.3.	Une bijection essentielle . . . . .	317
5.4.	Propriétés de la matrice $B^{ij}$ . . . . .	317
5.5.	Équivalence Spline-Krigeage . . . . .	319
<b>7</b>	<b>Étude de la bathymétrie sur le site du « Titanic »</b>	<b>325</b>
1.	Présentation des données . . . . .	325
2.	Calcul des variogrammes . . . . .	326
3.	Analyse Variographique non stationnaire . . . . .	327
3.1.	Approche automatique . . . . .	327
3.2.	Modification des paramètres par défaut . . . . .	327
3.3.	Une solution acceptable . . . . .	328
3.4.	Recherche d'allègement des calculs . . . . .	329
4.	Éléments de conclusion . . . . .	329

---

<b>8</b>	<b>Introduction au filtrage d'erreurs</b>	<b>339</b>
1.	Filtrage d'une erreur non systématique . . . . .	339
1.1.	Hypothèses et notations . . . . .	339
1.2.	Système de filtrage . . . . .	340
1.3.	Remarque sur la régularité du système . . .	341
1.4.	Comparaison aux krigeages monovariés .	341
1.5.	Cas particulier d'un bruit blanc . . . . .	342
1.6.	Estimation de la dérive . . . . .	343
2.	Filtrage d'une erreur systématique . . . . .	344
2.1.	Hypothèses et notations . . . . .	344
2.2.	Régularité du système de cokrigeage . . . .	345
2.3.	Estimations optimales . . . . .	346
<b>III</b>	<b>Bibliographie, Notations, Index</b>	<b>349</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>351</b>
	<b>Notations</b>	<b>357</b>
1.	Rappel préliminaire . . . . .	357
2.	Conventions générales . . . . .	357
2.1.	Abréviations . . . . .	357
2.2.	Convention de sommation . . . . .	358
2.3.	Identification des Krigeages . . . . .	359
2.4.	Majuscules, minuscules . . . . .	359
3.	Symboles alpha-numériques . . . . .	360
4.	Symboles divers . . . . .	363
	<b>Index</b>	<b>365</b>